

Contenido Tercer Parcial

**Bienvenidos al Maravilloso mundo de los
Principia**

Philosophiae naturalis Principia mathematica

DERIVADAS



Contenidos

- Recta tangente al gráfico de una función.
- Velocidad y aceleración.
- Derivada.
- Diferenciabilidad y continuidad.
- Derivada de la suma, resta, multiplicación y cociente de funciones.
- Derivada de funciones polinómicas, racionales y trigonométricas.
- Regla de la cadena y derivadas de orden superior.
- Derivación implícita.
- Derivada de la función inversa.
- Derivadas de las funciones trigonométricas inversa.

Sir Isaac Newton y Gottfried Wilhelm von Leibniz. Las dos semillas de uno de los arboles más grandes de la historia.

“Newton había descubierto los principios de su cálculo diferencial e integral hacia 1665-1666 y, durante el decenio siguiente, elaboró al menos tres enfoques diferentes de su nuevo análisis.

Abordo el desarrollo del cálculo a partir de la geometría analítica desarrollando un enfoque geométrico y analítico de las derivadas matemáticas aplicadas sobre curvas definidas a través de ecuaciones. Newton también buscaba cómo cuadrar distintas curvas, y la relación entre la cuadratura y la teoría de tangentes. Después de los estudios de Roberval, Newton se percató de que el método de tangentes podía utilizarse para obtener las velocidades instantáneas de una trayectoria conocida. En sus primeras investigaciones

Newton lidia únicamente con problemas geométricos, como encontrar tangentes, curvaturas y áreas utilizando como base matemática la Geometría Analítica de Descartes. “

“Sobre Leibniz y el principio de la razón suficiente:

El principio de razón suficiente, enunciado en su forma más acabada por Gottfried Leibniz en su *Teodicea*, afirma que no se produce ningún hecho sin que haya una razón suficiente para que sea así y no de otro modo. De ese modo, sostiene que los eventos considerados azarosos o contingentes parecen tales porque no disponemos de un conocimiento acabado de las causas que lo motivaron.

Una de las consecuencias generales para la física del principio de razón suficiente fue condensada por Leibniz en forma de aforismo: "En el mejor de los mundos posibles la naturaleza no da saltos y nada sucede de golpe", lo cual vincula dicho principio con el problema del continuo y de la infinita divisibilidad de la materia.”

Newton vs Leibniz

“Ambos científicos protagonizaron una dura polémica sobre la autoría del desarrollo de esta rama de la matemática. Sin embargo esta lucha no fue tan profunda como para que Newton y Leibniz dejaran de intercambiar resultados. Hoy se consideran a ambos como padres del cálculo de forma independiente, como características por ejemplo podemos decir que la notación de Leibniz era mejor y la formulación de Newton se aplicaba mejor a problemas prácticos.”

Tomado de Wiki.

Ejercicios a resolver en la práctica

Si un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado con función de posición f , entonces su velocidad instantánea en el instante t_0 es

$$v = \lim_{t \rightarrow 0} v_{pro} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + t) - f(t_0)}{t}$$

siempre que el límite exista (sea un número real).

I. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con la ecuación de movimiento $s = f(t)$, donde s se mide en metros y t en segundos. Encuentra, por definición, la velocidad $v(t) = \frac{ds}{dt}$ cuando $t = 2$. Si $f(t) = t^2 - 6t - 5$.

II. a) Dada $f(x) = \sqrt{4x-5}$, indica el dominio de la función f , halla la derivada por definición e indica el dominio de la función derivada.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{6}{4}$.

1. Para cada una de las siguientes funciones reales de variable real, calcula $f'(x)$, no se requiere simplificar el resultado.

a) $f(x) = \frac{2}{x \operatorname{sen} x} + 8x - \pi$

b) $f(x) = \frac{\cos x}{5x - x^3} + x \operatorname{sec} x$

c) $f(x) = x^{-3} \cos^3(2x^2 + 3x - 1)$

d) $f(x) = \operatorname{sen}[(x^4 + 2)(3 - 2x)^{10}]$

e) $f(x) = \tan\left(\frac{1 + x^4}{\cos(\sqrt{x^5})} - 3\right)$

f) $f(x) = \frac{\arctan(x^2 + 3)}{x^2 + 2}$

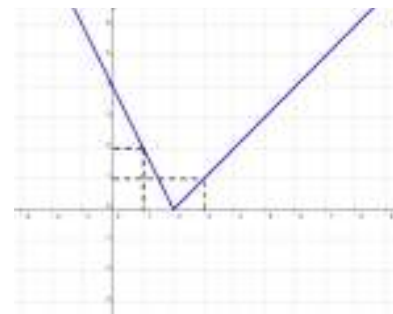
2. Sean f y g son dos funciones reales de variable real derivables en \mathbb{R} . En cada caso, Halla f' en función de g' .

a) $f(x) = \frac{g(3x+1)}{x^6 + 2x} + \sqrt{5}$

b) $f(x) = g^4(x^6 + 3) \cdot \cos(2x)$

3. Sean f y g dos funciones reales de variable real que satisfacen $f(1) = 2$, $f'(1) = -3$, $g(1) = g'(1) = 2$. Sea h la función real de variable real definida por $h(x) = \frac{5 + f(x)}{x - 3g(x)}$. Halla $h'(1)$.

4. Sea f una función que satisface, $f'(1) = -2$, $f'(2) = -4$ y $f'(0) = 0$, sea $h(x) = f(g(x))$, donde g es la función cuya gráfica se muestra. Halla, si existen, $h'(1)$, $h'(3)$ y $h'(2)$.



5. Dada la función real de variable real definida como $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 4x + a & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ bx^2 - cx + 7 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, donde a , b

y c son constantes, halla los valores de a , b y c para que f sea continua en $x = 1$ y derivable en $x = 2$.

6. En cada caso, halla $\frac{dy}{dx}$, suponiendo que las ecuaciones dadas definen implícitamente una función real derivable f tal que $y = f(x)$

a) $5x^{\frac{4}{5}} + 10y^{\frac{7}{5}} = 4\sqrt{xy}$ b) $\sin(xy) = x^2y^3$

7. Halla la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$ en el punto de coordenadas $(3, 1)$.

8. La función $f: [3, 6) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = (x - 3)^2 + 2$, admite inversa.

a) Grafica la función f .

b) Halla el dominio de f^{-1} .

c) Calcula $(f^{-1})'(3)$ sin hallar una expresión para f^{-1} .

9. Supón que $x^2 - 3xy + y^2 = 4$ define una función f derivable tal que $y = f(x)$, demuestra que

$$y'' = \frac{40}{(2y - 3x)^3}.$$

10. Halla los valores de a , b y c para que la curva de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pase por el punto $A(1, 3)$ y la recta tangente en $B(2, 6)$ sea $4x - y = 1$.

Ejercicios propuestos

I. a. Dada $f(x) = \sqrt{x+6}$, indica el dominio de la función f , halla la derivada por definición e indica el dominio de la función derivada.

b. Determina el punto, si existe, de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x+6}$ en el cual la recta tangente es paralela a la recta L de ecuación $2y - x + \sqrt{2} = 0$.

II. Un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta con desplazamiento $s(t)$ tiene velocidad $v(t) = \frac{ds}{dt}$ y aceleración $a(t) = \frac{dv}{dt}$, cuando esas derivadas existen. El objeto está avanzando si $v(t) > 0$ y retrocediendo si $v(t) < 0$ y está estacionario si $v(t) = 0$, está aumentando su velocidad si $a(t) > 0$ y disminuyendo su velocidad si $a(t) < 0$. Con base en estos conceptos resuelva el siguiente problema.

El desplazamiento de un objeto que se mueve en línea recta en un tiempo t , donde s se mide en metros y t en segundos, está dado por

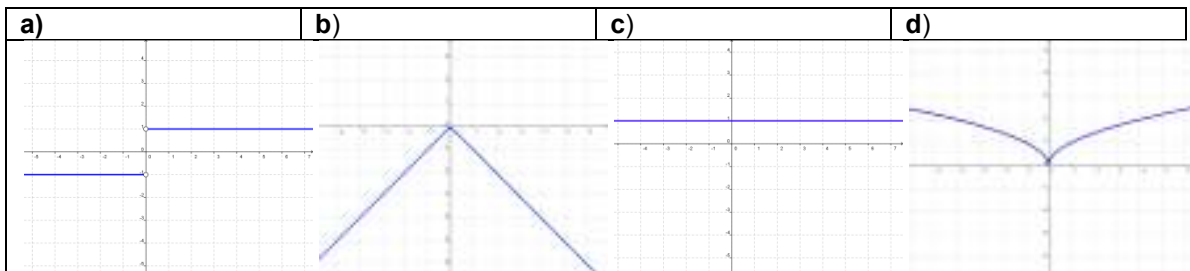
$$s(t) = \frac{5}{3}t^3 - 15t^2 + 25t + 6$$

a) Halla la velocidad del objeto y analiza el movimiento entre los tiempos $t=0$ y $t=7$.

b) Halla la distancia total recorrida por el objeto entre los tiempos $t=0$ y $t=7$.

c) Halla la aceleración del objeto y determina cuando el objeto está aumentando o disminuyendo su velocidad entre los tiempos $t=0$ y $t=7$.

1. ¿Cuál de las gráficas que se muestran a continuación corresponde a la gráfica de f' si $f(x) = |x|$?





Reflexiona

- ¿Cómo hallas la derivada de la suma de funciones elementales?
- ¿Cómo hallas la derivada de la diferencia de funciones elementales?
- ¿Cómo hallas la derivada del producto de dos funciones elementales?
- ¿Cómo hallas la derivada del cociente de dos funciones elementales?

2. Halla $f'(x)$.

a) $f(x) = (x^7 + 3x^{-3} + \sqrt{x}) \operatorname{sen}(2)$ b) $f(x) = \frac{2x^{-3} + x^7 - \tan x}{\sqrt{7} \sec x - 4x}$

3. Si $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$, verifica que $f'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x} + 1)$

4. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^2 + 5$ en el punto de abscisa 1.

5. Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de ordenada $\frac{1}{4}$.



Reflexiona

- ¿Qué orden sigues para hallar la derivada de una función compuesta?

6. Para cada una de las siguientes funciones reales de variable real, calcula $f'(x)$, no se requiere simplificar el resultado.

d) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(2x)}$

e) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x^3 + \sqrt{\pi})$

$$\text{f) } f(x) = \frac{\cos^2(\sin(x) - \sqrt{3x})}{x+1}$$

$$\text{g) } f(x) = \left(5 + \left(2 + (3+x^2)^3 \right)^4 \right)^6$$

7. Determina, si existen, los puntos de la gráfica de $f(x) = \sin x$ en el cual la recta tangente es paralela al eje x .

8. Sean f y g son dos funciones reales de variable real derivables en \mathbb{R} . En cada caso, Halla f' en función de g' .

$$\text{a) } f(x) = g(x+3) \quad \text{b) } f(x) = \frac{g(3x)}{x^2+1} \quad \text{c) } f(x) = \cos(2g^3(x+g(x)))$$

9. Sean f y g dos funciones reales y derivables. Calcula $k(2)$ y $k'(2)$ suponiendo que $k(x) = f(g(x))$ y $f(2) = -4$, $g(2) = 2$, $f'(2) = 3$ y $g'(2) = 5$.

10. Sean g y h dos funciones reales y derivables. Si $f(y) = g(h(y))$ y $f(4) = 3$, $g(4) = 3$, $h(4) = 4$, $f'(4) = 2$ y $g'(4) = -5$, determina $h'(4)$.

11. Determina los puntos, si existen, de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en el cual la recta tangente es paralela a la recta L de ecuación $2y - 4x + \sqrt{2} = 0$.

12. Halla, si existen, los puntos de la gráfica en que la recta tangente a la gráfica de la función f , definida por $f(x) = x^3 + 5$ es perpendicular a la recta de L ecuación $x + 3y = 2$.

13. Sea $f(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ ¿Es la función f derivable en $x=1$? Justifica tu respuesta.

14. Sea $f(x) = \begin{cases} (x-3)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right) & \text{si } x \neq 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ ¿Es f derivable en $x=3$? Justifica tu respuesta.

15. Dada $f(x) = ax^2 + bx + c$ halla a , b y c para que la recta tangente a la gráfica en el punto $P(1,6)$ sea paralela a la recta de ecuación $y - 11x = \sqrt{5}$ y la gráfica de la función interseque al eje y en el punto de ordenada -2 .

16. Halla los valores de a , b y c para que la curva de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pase por el punto $A(-1,0)$ y que sea tangente a la recta $y = x$ en el punto de abscisa $x=1$

17. Dada $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + b, & \text{si } x < 2 \\ ax^3 - 1, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, halla a y b para que la función f sea derivable en \mathbb{R} .

18. Halla $\frac{dy}{dx}$, suponiendo que la ecuación $\sqrt{x^2 y} = 3y$ define implícitamente una función real derivable f tal que $y = f(x)$.

19. Para cada una de las siguientes funciones reales de variable real halla $f'(x)$.

a) $f(x) = 5x^4 \arccos(\sqrt{x} - \sqrt{7})$ b) $f(x) = \arctan\left(\frac{\text{sen}(x)}{2}\right)$

20. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y^3 + 2y = 3 \cos(x) + \text{sen}(x)$ en el punto $P(\pi, -1)$.

21. Demuestra que la recta tangente a la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ en el punto $P(1, \sqrt{3})$ es ortogonal a la recta L que pasa por P y el $(0, 0)$.

22. Dada la función $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 3 - (x+1)^2$

a) Grafica la función f .

b) A partir de la gráfica de la función dada decide si la función f admite inversa.

c) Halla el dominio de f^{-1} .

d) Calcula $(f^{-1})'(-13)$ sin hallar una expresión para f^{-1} .

23. Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, en el punto $P(x_0, y_0)$ es $\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$.

24. Usa el problema anterior para hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, en el punto $P(\sqrt{2}, -1)$.

Respuestas de los ejercicios propuestos

I) a) $\text{Dom}_f = [-6, +\infty)$, $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h+6} - \sqrt{x+6}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x+6}}$, $x > -6$, $\text{Dom}_{f'} = (-6, +\infty)$

b) En el punto $(-5, 1)$ la recta tangente es paralela a la recta dada.

II) a) $v(t) = 5t^2 - 30t + 25 = 5(t-1)(t-5)$

Para $0 < t < 1$: $v(t) > 0$, en consecuencia el objeto avanza.

Para $t = 1$: $v(t) = 0$

Para $1 < t < 5$: $v(t) < 0$, en consecuencia el objeto retrocede.

Para $t = 5$: $v(t) = 0$

Para $5 < t < 7$: $v(t) > 0$, en consecuencia el objeto avanza.

b) $\frac{66913}{3} m$

c) $a(t) = 10t - 30$

Para $0 < t < 3$: $a(t) < 0$, en consecuencia el objeto está disminuyendo su velocidad.

Para $t = 3$: $a(t) = 0$

Para $3 < t < 7$: $a(t) > 0$, en consecuencia el objeto aumentando su velocidad.

1) a

2) a) $f'(x) = \text{sen}(2) \left(7x^6 - 9x^{-4} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$

b) $f'(x) = \frac{(\sqrt{7} \sec x - 4x)(-6x^{-4} + 7x^6 - \sec^2 x) - (2x^{-3} + x^7 - \tan x)(\sqrt{7} \sec x \tan x - 4)}{(\sqrt{7} \sec x - 4x)^2}$

4) $y - 6x - 2 = 0$

5) $4y - 64x + 255 = 0$

6) d) $f'(x) = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$

e) $f'(x) = -3x^2 \cos(\cos x^3 + \sqrt{\pi}) \text{sen}(x^3)$

f) $f'(x) = \frac{(x+1)2 \cos(\text{sen}(x) - \sqrt{3x}) \left(-\text{sen}(\text{sen}(x) - \sqrt{3x}) \right) \left(\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} \right) - \cos^2(\text{sen}(x) - \sqrt{3x})}{(x+1)^2}$

g) $f'(x) = 144x \left(5 + \left(2 + (3+x^2)^3 \right)^4 \right)^5 \left(2 + (3+x^2)^3 \right)^3 (3+x^2)^2$

7) En los puntos de la forma $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1 \right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, -1 \right)$ con $k \in \mathbb{Z}$,

8) a) $f'(x) = g'(x+3)$ b) $f'(x) = \frac{3(x^2+1) \cdot g'(3x) - 2x \cdot g(3x)}{(x^2+1)^2}$

c) $f'(x) = -6 \operatorname{sen}(2g^3(x+g(x))) \cdot g^2(x+g(x)) \cdot g'(x+g(x)) \cdot (1+g'(x))$

9) $k(2) = -4$, $k'(2) = 15$. 10) $h'(4) = -\frac{2}{5}$

11) $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2} \right)$ y $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right)$ 12) $P_1(1, 6)$ y $P_2(-1, 4)$.

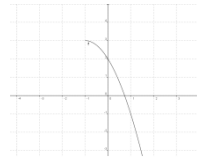
13) No, $f_+'(1) \neq f_-'(1)$ 14) Si 15) $a = 3$, $b = 5$, $c = -2$

16) $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$ y $c = \frac{1}{4}$ 17) $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{11}{3}$ 18) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{6\sqrt{x^2y} - x^2}$

19) a) $f'(x) = 20x^3 \operatorname{arccos}(\sqrt{x} - \sqrt{7}) + 5x^4 \left(-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1 - (\sqrt{x} - \sqrt{7})^2}} \right)$ b) $f'(x) = \frac{2 \cos(x)}{4 + \operatorname{sen}^2(x)}$

20) $5y + x + 5 - \pi = 0$

22) a)



b) Si c) $[-22, 3]$ d) $-\frac{1}{8}$

24) $\frac{\sqrt{2}x}{4} - \frac{y}{2} = 1$



Halla el error

- Sea $f(x) = x^2$, Para hallar $f'(3)$ se calcula primero $f(3) = 9$ y luego se deriva $f(3)$, es decir, $f'(3) = 0$.
- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ en el punto $(2, 8)$ es $f'(x) = 3x^2$.
- Si la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto $P(a, f(a))$ es $f'(a) = 2a - 1$ entonces la pendiente de la recta normal en el punto P es $-2a + 1$.
- La derivada del producto es el producto de las derivadas.
- $f(x) = \sqrt[5]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{5\sqrt{x}}$
- $f(x) = \sqrt{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
- $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2+1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = 2$
- Toda función continua es derivable.
- La pendiente de la recta normal a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es $\frac{1}{f'(a)}$.
- Si $g(x) = x^3 h(2-3x)$ entonces $g'(x) = 3x^2 h'(2-3x)(-3)$
-
- $f(x) = \left(x^2 - \cos x\right) \left(2 + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = (2x + \operatorname{sen} x) \left(-\frac{1}{x^2}\right)$
- $f(x) = \frac{\cos^4(3x^5 + x)}{5} \Rightarrow f'(x) = -\frac{4 \operatorname{sen}^3(3x^5 + x)}{5}$
- $f(x) = \frac{x^3 - \sqrt{x}}{\tan x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^3 - \sqrt{x}) \sec^2 x - \left(3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \tan x}{\tan^2 x}$
- $f(x) = \sec(x^5 - 3) \Rightarrow f'(x) = 5x^4 \tan x \sec(x^5 - 3)$
- $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- El dominio de la función derivada es igual al dominio de la función.
- La pendiente de la recta de ecuación $3y - x + \sqrt{3} = 0$ es $m = -1$

Ejercicios Extras:

TOMO I:

1 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 + 2x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

2 Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^5 + \frac{x}{3}$

b) $f(x) = \text{sen } x$

3 Calcula $f'(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = \frac{3x^2}{2x + 3}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \text{sen } x$

4 Calcula la función derivada de:

$$f(x) = \text{sen} \left(\frac{x + 1}{2x - 3} \right)$$

5 Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto de abscisa $x = 2$.

6 Determina los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{x + 2}$$

7 Calcula $f'(2)$, utilizando la definición de derivada, siendo:

$$f(x) = 2x^2 + 5x$$

8 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, que es paralela a la recta $2x + 3y - 1 = 0$.

9 Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ que son paralelas a la recta $y = 10x + 2$.

10

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y - \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 0$ en $x = -2$.

11 Halla la derivada de la función $f(x)$, en $x_0 = -1$, utilizando la definición de derivada:

$$f(x) = \frac{4x^2 + 1}{2}$$

12

Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{x-2}{x+1}$ en el punto de corte con el eje de abscisas.

13 En cada caso, determine $\frac{d^2y}{dx^2}$ y $\frac{d^3y}{dx^3}$:

a) $y = 2x^5 + x^2 - 1$

b) $f(x) = 4\sqrt{x^5} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = (2x^3 + 1)^{-5}$

d) $f(t) = \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}}$

e) $f(x) = \frac{5 - 4x^2 + x^5}{x^3}$

f) $f(t) = \frac{t - 1}{t^2 + 2t + 1}$

TOMO II:

- Una partícula se mueve sobre una línea recta. Su posición en el instante de tiempo t , viene dada por la función $s(t) = 5t^2 + 3t - 1$. Encuentre la velocidad instantánea de la partícula para cualquier t .
- Encuentre una ecuación para la recta tangente a la gráfica de
 - $y = \sin(x) + 2$ en el punto $(0, 2)$
 - $y = \sqrt{x+3}$ en el punto $(1, 2)$

- Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos^5\left(\frac{1}{x}\right) \sin^3(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Halle la derivada de f en $x = 0$ (en caso de existir).

- Sea F la función definida por

$$F(x) = \begin{cases} 6x + 1 & \text{si } x < 3 \\ ax^2 + bx & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Halle valores para las constantes a y b de manera que F sea continua y derivable en $x = 3$

5. Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Encuentre el valor de a para que g sea continua en $x = 0$. ¿Será la función resultante diferenciable en $x = 0$?

6. a) Suponga que la función $f(x)$ satisface que $|f(x)| \leq x^2$ para todo x en el intervalo $(-a, a)$, donde $a > 0$. Demuestre que f es diferenciable en $x = 0$.
b) Pruebe que la función g definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

es diferenciable en $x = 0$. ¿Será g continua en $x = 0$?

7. Encuentre $f'(x)$ para $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

8. Calcule la derivada de las siguientes funciones (en los puntos donde ésta exista):

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x) = \operatorname{sen}(x) + x^3 & \text{(b)} g(x) = x^4 \tan(x) & \text{(c)} h(x) = \frac{7x^5}{\cos x} \\ \text{(d)} G(x) = \frac{2x^2 + x^3 - 2}{x^3 - 7x} & \text{(e)} f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + \cos(x)}{\tan(x)} & \text{(f)} g(x) = \operatorname{sen}^3(x) \end{array}$$

9. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$f(x) = \frac{|1-x| \operatorname{sen}(x)}{1 + \cos(x)} + 1$$

en el punto de abscisa $x = 0$.

10. Sea $y = \cos(x) \operatorname{sen}(x)$ restringida al intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Hallar los puntos de la gráfica donde su recta tangente es horizontal y escriba su ecuación.
11. Encuentre la derivada de la función $G(x) = \frac{x^2 - 5x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ de dos maneras. Primero aplicando las reglas de derivación directamente a G sin simplificar y luego simplificando la función antes de derivarla.
12. Pruebe que no existen dos funciones f y g tales que f y g son diferenciables con $f(0) = g(0) = 0$ y $x = f(x)g(x)$. Sugerencia: Derive.

TOMO III:

1. Calcule la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \arcsen(x) + \arccos(x)$ (b) $f(x) = \arcsen(\tan(x))$

(c) $f(x) = \frac{\sen(3x)}{x\sqrt{x+1}}$ (d) $f(x) = \left(\frac{x^2+1}{\arctan(x)}\right)^{\frac{2}{3}}$

(e) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ (f) $f(x) = \cos(\tan(\sqrt[5]{x} + x))$

2. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sen\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ ax + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Halle constantes a y b tales que la función sea diferenciable en \mathbb{R} .

3. Halle y' en las siguientes ecuaciones:

a) $x^2y - xy + x^2 + y^2 = 0$

b) $\cos(x + y) = y^2 \sen(x)$

4. Suponga que $y = f(x)$, satisface la ecuación

$$\arcsen(x + y) = 3(x - 1)y^3.$$

Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, -1)$.

5. Encuentre y'' si $x^4 + y^4 = 25$.

6. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Calcule $f', f'', f''', f^{(4)}$.

b) Proponga una expresión para $f^{(n)}$ con $n \in \mathbb{N}$.

c) Demuestre que la fórmula que encontró para $f^{(n)}$ es válida.

7. Halle la derivada con respecto a x de las siguientes funciones:

a) $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2 + 1)}{\sqrt[5]{5 - x}}}$.

Practica elaborada por la Prof:

Aida Montezuma.

Ampliada por Prof

Antonio Di Teodoro. 2010. (Basada en prácticas anteriores de la USB-Matemáticas), en Especial las prácticas de la Profa **Diasparra Maikol.**

Formato doc->Pdf